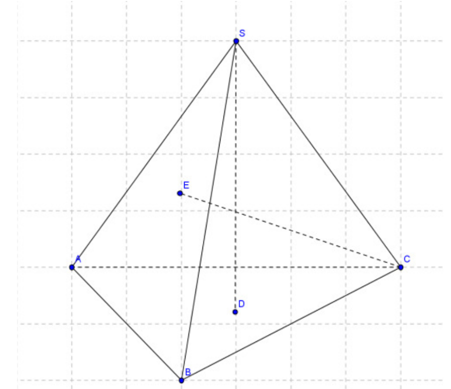
Câu khoảng cách trong đề thi THPTQG

Câu khoảng cách của hình học không gian (thuần túy) trong đề thi THPTQG dù không là một câu khó nhưng để có thể nhìn được chân đường cao hoặc đoạn vuông góc chung đối với học sinh trung bình yếu không phải dễ. Bài viết mong muốn giúp các em tự tin hơn với câu này, dù là điểm 8,9,10 là khó lấy, nhưng điểm 7 với các em thì hoàn toàn có thể. (Bài viết có tham khảo nhiều nguồn khác nhau nên khó lòng trích dẫn các nguồn ở đây xin chân thành cám ơn các tác giả, các nguồn tài liệu đã tham khảo để viết bài này).

I) Ý tưởng: Ta có một hình chóp: $S.ABC$ việc tính thể tích của khối chóp này được thực hiện rất dễ dàng (đường cao hạ từ S xuống mặt đáy (ABC)), ta cần tính khoảng cách từ C đến (SAB) tức tìm chiều cao CE. Vì thể của hình chóp là không thay đổi dù ta có xem điểm nào đó (S, A, B, C) là đỉnh



vì vậy nếu ta biết diện tích ΔSAB thì khoảng cách cần tìm đó $CE = \dfrac{3V}{S_{\Delta SAB}}$. Có thể gọi là dùng *thể tích 2 lần.*

❈ ***Chú ý:*** Khi áp dụng phương pháp này ta cần nhớ công thức tính diện tích của tam giác:

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với p là nửa chu vi và a, b, c là kích thước của 3 cạnh.

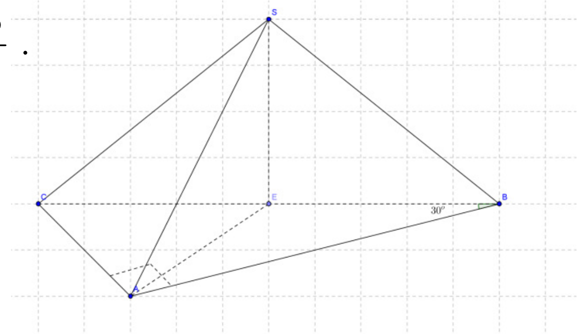
II) Ví dụ minh họa:

VD1: (A-2013) *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^o$; SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với mặt đáy. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ C đến (SAB).*

Lời giải

▪ Gọi E là trung điểm của BC khi đó $SE \perp (ABC)$ và $SE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $BC = a \Rightarrow AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; AC = \dfrac{a}{2}$ vì vậy thể tích



của khối chóp là: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{16}$

▪ Để tính khoảng cách từ C đến (SAB) ta cần tính diện tích ΔSAB.

Ta có $AB=\frac{a\sqrt{3}}{2}SB=a;SA=\sqrt{SE^2+EA^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a$, Áp dụng công thức Heron ta được:

$$S_{\Delta SAB}=\sqrt{p(p-SA)(p\text{-}SB)(p\text{-}AB)};\left(p=\frac{a+a+{}^{a\sqrt{3}}\!/_{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{39}}{16}a^2$$

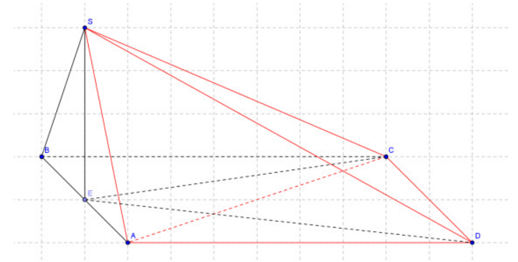
Vậy $d(C;(SAB))=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}}=\frac{a\sqrt{39}}{13}$ □

❋ ***Nhận xét:*** *Với cách tính trên khâu tính diện tích ta dùng máy tính* ***hầu hết*** *đều ra đẹp. So với cách tính bằng tọa độ hóa thì cách tình này đơn giản hơn rất nhiều về tính toán và trình bày chỉ khó ở khâu tính diện tích (nhưng máy tính đã đảm nhận), so với cách lùi về E để tính (đương nhiên phải kẻ thêm đường phụ) với học sinh* ***trung bình yếu*** *có thể nói đây là lựa chọ tốt nhất.*

VD2: (B-2013) *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A đến (SCD).*

Lời giải

▪ Gọi E là trung điểm của AB khi đó $SE\perp(ABC)$, và $SE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Vì vậy thể tích khối chóp cần tính là $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

▪ Ta cần tính khoảng cách từ A đến (SCD), ta quan sát khối chóp $S.ACD$ có thể tích là $V_{S.ACD}=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}a^2=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ vì vậy để tính được khoảng cách ta cần có diện tích của ΔSCD.

Ta có $CD = a; SD = SC = \sqrt{SE^2 + DE^2} = \sqrt{SE^2 + DA^2 + AE^2} = a\sqrt{2}$, Áp dụng công thức Heron ta được:

$$S_{\Delta SCD} = \sqrt{p(p-CD)(p-SD)(p-SC)}; \left(p = \frac{a + a\sqrt{2} + a\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{7}}{4}a^2$$

Vì vậy $d\left(a;(SCD)\right) = \dfrac{3V_{S.ACD}}{S_{\Delta SCD}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}a$ □

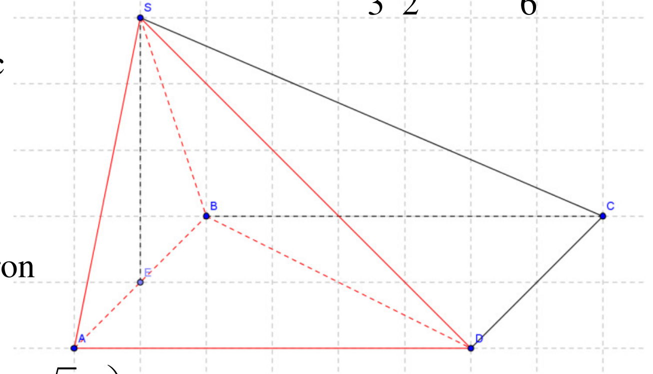
VD3: (A-2014) *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a $SD = \frac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AB. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SBD).*

Lời giải

▪ Gọi E là trung điểm của AB khi đó $SE \perp (ABC)$, dùng định lý Pitago ta tính được: $SE = a$.

Từ đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^3$

▪ Ta cần tính khoảng cách từ A đến (SBD) ta quan sát hình chóp $S.ADB$ có thể tích là $\frac{1}{3}.\frac{1}{2}a^2.a = \frac{1}{6}a^3$ vậy nên nếu ta tìm được diện tích tam giác ΔSBD bài toán sẽ được giải quyết.



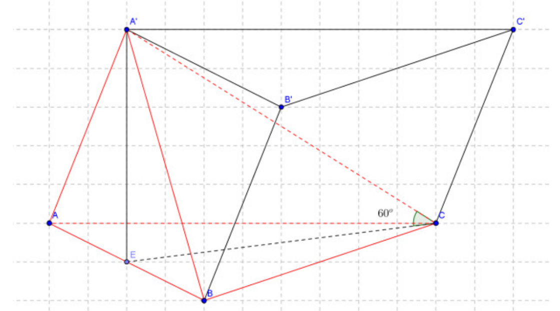
Ta có $BD = a\sqrt{2}; SD = \frac{3a}{2}; SB = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ Áp dụng công thức Heron ta được: $S_{\Delta SBD} = \sqrt{p(p-SB)(p-SD)(p-BD)}; \left(p = \dfrac{a\sqrt{2} + \frac{3a}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}a}{2} \right) = \frac{3}{4}a^2$

Vậy $d(A;(SBD)) = \dfrac{3V_{S.ABD}}{S_{\Delta SDB}} = \dfrac{3.a^2/6}{3a^2/4} = \dfrac{2a}{3}$ □

VD4: (B-2014) *Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm của cạnh AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng 60^o. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ B đến $(ACC'A')$*

Lời giải

▪ Gọi E là trung điểm AB, khi đó $A'E\perp(ABC)$, $60^o=\left(A'C;(ABC)\right)=\widehat{A'CE}$.



Ta có $CE=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao trong tam giác đều)

vì vậy $A'E=\tan 60^0 CE=\dfrac{3a}{2}$ $\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3 3\sqrt{3}}{8}$.

▪ Ta cần tính khoảng cách từ B đến $(ACC'A')$ tức từ B đến $(AA'C)$, ta quan sát khối chóp $A'.ABC$ có thể tích là $V_{A'.ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ vì vậy ta cần tìm diện tích $\Delta A'AC$ (để dùng *thể tích 2 lần*).

Ta có $AC=a;\ AA'=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}a\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{2};A'C=\dfrac{CE}{\cos 60^o}=a\sqrt{3}$. Áp dụng công thức Heron ta được:

$$S_{\Delta A'AC}=\sqrt{p(p-A'A)(p-A'C)(p-AC)};\left(p=\dfrac{a+\dfrac{a\sqrt{10}}{2}+a\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{39}}{8}a^2$$

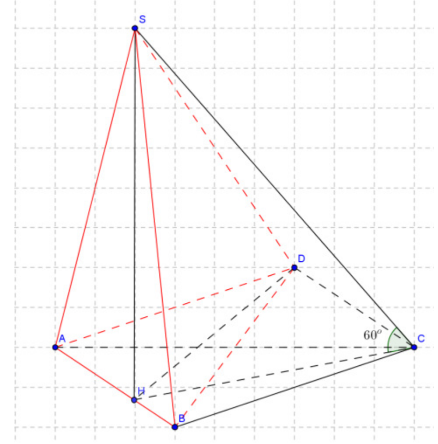
Vậy $d\left(B;(ACC'A')\right)=d\left(B;(A'AC)\right)=\dfrac{3V_{A'.ABC}}{S_{\Delta A'AC}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}a$ □

Qua bốn VD ta thấy được việc áp dụng cách *Thể tích 2 lần* tỏ ra rất hiệu quả vì nó không cần suy nghĩ quá nhiều (vì vậy người viết không khuyến khích các bạn khá giỏi làm theo cách này trừ khi bí). Trước khi ta xét mức độ áp dụng của phương pháp với các đề thi thử năm nay (2015) cũng như các đề thi cũ, ta sẽ mở rộng cách làm phục vụ cho yêu cầu tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau khi mà đoạn vuông góc chung rất khó tìm.

***III) Các ví dụ khác áp dụng cách tính** Thể tích 2 lần :*

***VD1: (A-2012)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữ hai đường thẳng SA và BC.*

Lời giải



▪ Ta có $60^O = \widehat{(SC;(ABC))} = \widehat{SCH}$ mà $CH = \sqrt{\left(\frac{a}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$

nên ta được $SH = \tan 60^o.CH = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Do đó thể tích khối chóp là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{21}}{3} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$.

▪ Dựng hình bình hành $ABCD$ (điều này cũng rất tự nhiên vì đây là cách tìm khoảng cách giữa hai đường chéo nhau), khi đó $d(SA;BC) = d(B;(SAD))$. Ta quan sát khối chóp $S.ABD$ khối chóp này có thể tích bằng với thể tích của khối chóp $S.ABC$ tức $V_{S.ABD} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$ vì vậy để tính $d(B;(SAD))$ ta cần tính diện tích ΔSAD

Ta có $AD = a; SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \frac{5a}{3}$, $DH^2 = AD^2 + AH^2 - 2ADAH\cos 120^o = \frac{19a^2}{9}$ do đó $SD = \frac{2\sqrt{10}a}{3}$

Áp dụng công thức Heron ta được: $S_{\Delta SAD} = \sqrt{p(p - SA)(p - SD)(p - AD)};\left(p = \frac{a + \frac{2\sqrt{10}a}{3} + \frac{5a}{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}a^2$

Vậy $d(B;(SAD)) = \frac{3V_{S.ABD}}{S_{\Delta SAD}} = \frac{a\sqrt{42}}{8}$ □

***VD2: (D-2008)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa AM và $B'C$*

Lời giải

▪ Theo giải thiết ΔABC vuông cân tại B

vì vậy thể tích khối lăng trụ là: $V_{ABC.A'B'C'} = a\sqrt{2}\frac{1}{2}a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

▪ Gọi D là trung điểm BB' khi đó

$d(AM;B'C) = d(B'C;(ADM)) = d(C;(ADM)) = d(B;(ADM))$.

Ta quan sát khối chóp $D.ABM$ khối chóp này có thể tích là $V_{D.ABM} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}a.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ vậy nên để tính khoảng cách từ B đến (ADM) ta chỉ cần tính diện tích ΔADM .

Ta có: $AD = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}; DM = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \text{AM} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó diện tích $S_{\Delta AMD} = \sqrt{p(p-AM)(p-MD)(p-AD)};\left(p = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{14}}{8}a^2$

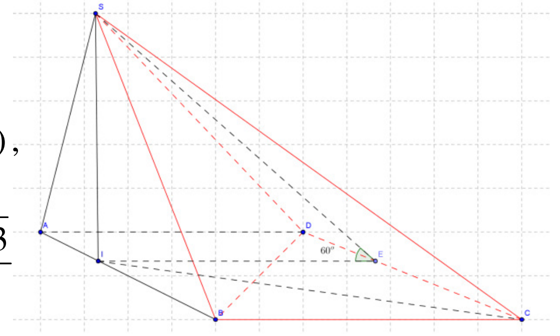
Vậy $d(AM;B'C) = d(B;(ADM)) = \frac{3V_{D.ABM}}{S_{\Delta ADM}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$ □

❈ ***Nhận xét:*** *Nếu biết cách linh hoạt ở các phương pháp thì bài toán khoảng cách này trở nên khá dễ và có thể có nhiều lời giải hay!*

VD3: (THTT- 452) *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là I thuộc AB sao cho $BI = 2AI$. Góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy bằng 60^o. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa AD và SC.*

Lời giải

▪ Gọi $E \in CD : CE = 2ED$, dễ dàng chứng minh được $60^O = \widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{SEI}$ từ đó ta tính được



$SI=\tan 60^o.EI=a\sqrt{3}$. Vì vậy thể tích $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{3}.a^2=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

▪ Ta thấy $AD//BC$ vì vậy $d(AD;SC)=d(AD;(SBC))=d(D;(SBC))$,

ta quan sát khối chóp $S.BCD$ có thể tích là $V_{S.BCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

vì vậy để tìm khoảng cách $d(D;(SBC))$ ta cần tìm diện tích ΔSBC.

Ta có: $BC=a;SB=\sqrt{\left(\frac{2a}{3}\right)^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{31}}{3};SC=\sqrt{SI^2+CB^2+BI^2}=\frac{2\sqrt{10}a}{3}$

Do đó diện tích $S_{\Delta SBC}=\sqrt{p(p-SB)(p-SC)(p-BC)};\left(p=\frac{a+\frac{a\sqrt{31}}{3}+\frac{2\sqrt{10}a}{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{31}}{6}a^2$

Vậy $d(AD;SC)=d(D;(SBC))=\frac{3V_{S.BCD}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{3\sqrt{93}}{31}a$ □

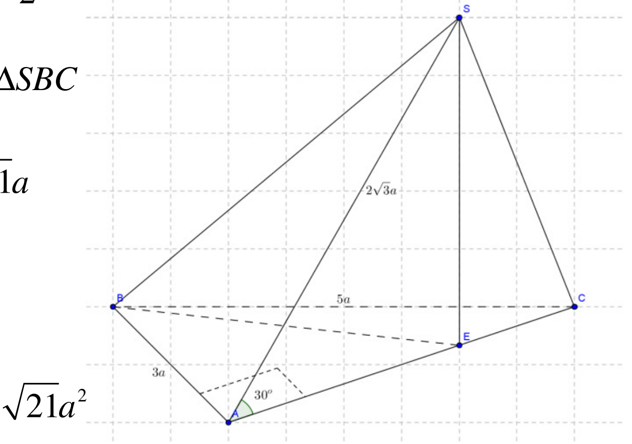
IV) <u>Vận dụng phương pháp vào các đề thi đề thi thử 2015:</u>

*Chúng ta cần hoán triệt một tư tưởng sau: Khi tính diện tích của một tam giác (phục vụ cho cách tính **thể tích 2 lần**) bài viết cố gắng dùng đúng một công thức là Heron với mục tiêu giảm nhẹ các kiến thức cần nhớ nhất có thể (điều này là cần thiết với các em trung bình yếu). Vì vậy sẽ có những các tính nhanh hơn khi tam giác đó đặc biệt (vuông, cân, đều…). Bạn đọc có thể tính theo nhiều hướng khác nhau nhưng đích đến cuối cùng là tròn điểm câu hình này!*

Bài tập 1: (Chuyên Nguyễn Quang Chiêu- Đồng Tháp) *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=3a$, $BC=5a$; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SA=2\sqrt{3}a$ và $\widehat{SAC}=30^O$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).*

Lời giải

▪ Gọi E là chân đường vuông góc kẻ từ S xuống BC, dễ thấy $SE\perp(ABC)$. Do đó $SE=SA.\sin 30^O=a\sqrt{3}$ hơn nữa $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=4a$. Vậy thể tích $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{1}{2}3a.4a=2\sqrt{3}a^3$.



▪ Để tính khoảng cách từ A đến (SBC) ta cần tính diện tích ΔSBC

Ta có: $BC=5a;SB=\sqrt{SE^2+BE^2}=\sqrt{SE^2+BA^2+AE^2}=\sqrt{21}a$

$SC=\sqrt{SE^2+EC^2}=2a$, do đó diện tích ΔSBC là:

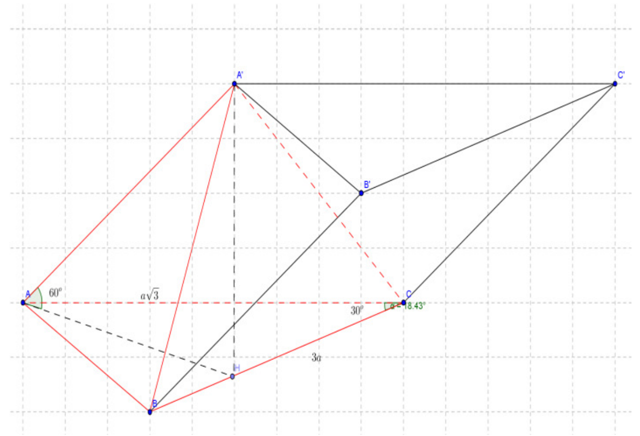
$$S_{\Delta SBC}=\sqrt{p(p-SB)(p\text{-}SC)(p\text{-}BC)};\left(p=\frac{5a+\sqrt{21}a+2a}{2}\right)=\sqrt{21}a^2$$

Vậy $d(A;(SBC))=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{6\sqrt{7}}{7}a$ □

Bài tập 2: (Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm – Quảng Nam) *Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AC=a\sqrt{3};BC=3a;\widehat{ACB}=30^o$. Cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^o. Mặt phẳng $(A'BC)\perp(ABC)$. Điểm $H\in BC:BC=3BH$ và mặt phẳng $(A'AH)\perp(ABC)$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ B đến $(A'AC)$.*

Lời giải

▪ Ta có $\begin{cases}(A'AH)\perp(ABC)\\(A'BC)\perp(ABC)\\(A'AH)\cap(A'BC)=A'H\end{cases}$ $\Rightarrow A'H\perp(ABC)$ khi đó góc giữa cạnh bên $A'A$ và mặt đáy (ABC) là $\widehat{A'AH}$ tức $\widehat{A'AH}=60^o$.



Ta lại có: $AH=\sqrt{CH^2+CA^2-2CH.CA.\cos 30^o}=a$

do đó $A'H=AH.\tan 60^0=a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ là:

$$V_{ABC.A'B'C'}=a\sqrt{3}.\left(\frac{1}{2}3a.\sqrt{3}a.\sin 30^0\right)=\frac{9a^3}{4}$$

▪ Ta quan sát khối chóp $A'ABC$ khối chóp này có thể tích là: $V_{A'ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3}{4}$ vậy nên để tính khoảng cách từ B đến $(A'AC)$ ta cần tìm diện tích của $\Delta A'AC$.

Ta có: $AC = a\sqrt{3}; A'A = \frac{AH}{\cos 60^0} = 2a; A'C = \sqrt{(2a)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = a\sqrt{7}$, diện tích $\Delta A'AC$ là:

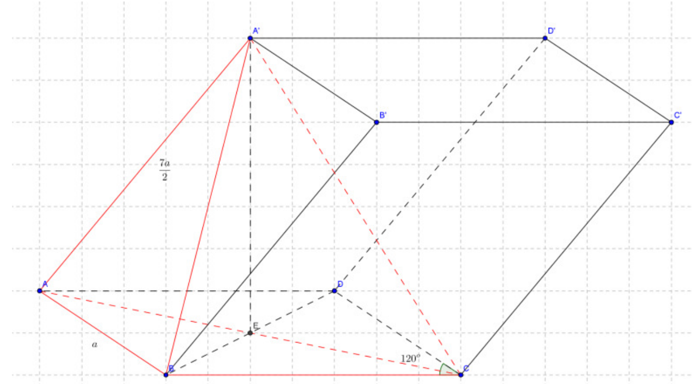
$$S_{\Delta A'AC} = \sqrt{p(p - A'A)(p - A'C)(p - AC)}; \left(p = \frac{a\sqrt{3} + 2a + a\sqrt{7}}{2}\right) = a^2\sqrt{3}$$

Vậy $d(B;(A'AC)) = \frac{3V_{A'ABC}}{S_{\Delta A'AC}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$ □

Bài tập 3: (Chuyên ĐH Vinh lần 3) *Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BCD} = 120^o$; $A'A = \frac{7a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Tính theo a thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và khoảng cách từ D' đến mặt phẳng $(ABB'A')$.*

Lời giải

▪ Gọi $E = AC \cap BD$; ta có $A'E \perp (ABCD)$ và $A'E = \sqrt{A'A^2 - AE^2} = 2\sqrt{3}a$. Do đó thể tích của khối hộp là: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'E.\frac{1}{2}.AC.BD = 2\sqrt{3}a.\frac{1}{2}.a.\sqrt{3}a = 3a^3$.



▪ Ta có $d(D';(ABB'A')) = d(C;(ABB'A'))$,

ta quan sát khối chóp $A'.ABC$, khối chóp này có thể tích là:

$V_{A'.ABC} = \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3}{2}$ ta cần tính diện tích $\Delta A'AB$

Ta có: $AB = a; A'A = \frac{7a}{2}; A'B = \sqrt{A'E^2 + BE^2} = \frac{a\sqrt{51}}{2}$, diện tích $\Delta A'AB$ là:

$$S_{\Delta A'AB}=\sqrt{p(p-A'A)(p-A'B)(p-AB)};\left(p=\frac{a+\frac{7a}{2}+\frac{a\sqrt{51}}{2}}{2}\right)=\frac{a^2\sqrt{195}}{8}$$

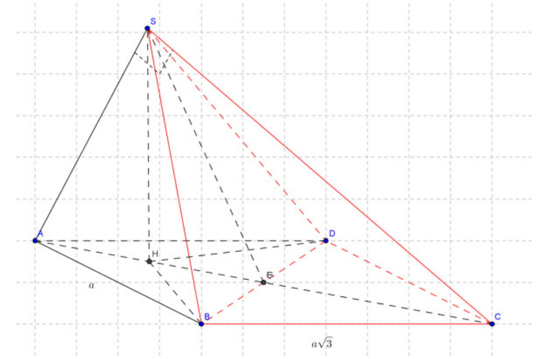
Vậy $d(D';(ABB'A'))=d(C;(ABB'A'))=\dfrac{3V_{A'.ABC}}{S_{\Delta A'AB}}=\dfrac{4\sqrt{195}a}{65}$ □

Bài tập 4 : (Chuyên Lam Sơn) *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm I, có $AB=a;BC=a\sqrt{3}$. Gọi H là trung điểm của AI. Biết $SH\perp(ABCD)$, tam giác ΔSAC vuông tại S. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ C đến (SBD) .*

Lời giải

- Ta có $SE=\dfrac{1}{2}AC=a$ vì vậy $SH=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, thể tích $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}a.a\sqrt{3}=\dfrac{a^3}{2}$

- Ta quan sát khối chóp $S.BCD$ khối chóp này có thể tích là $V_{S.BCD}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3}{4}$ vậy nên ta chỉ cần tính diện tích ΔSBD.



Ta có: $BD=2a;SB=\sqrt{HB^2+SH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$;

$$SD=\sqrt{HD^2+SH^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$$

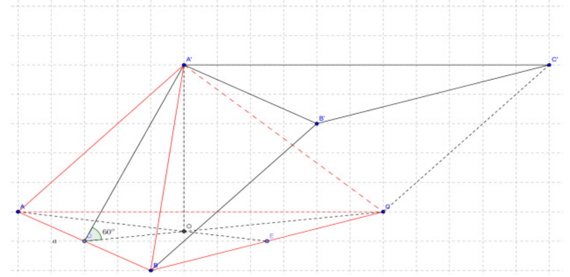
do đó diện tích ΔSBD là: $S_{\Delta SBD}=\sqrt{p(p-SB)(p-SD)(p-BD)};\left(p=\dfrac{2a+\frac{a\sqrt{6}}{2}+\frac{a\sqrt{10}}{2}}{2}\right)=\dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$

Vậy $d\left(C;(SBD)\right)=\dfrac{3V_{S.BCD}}{S_{\Delta SBD}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{15}$ □

Bài toán 5: (THTT-455) *Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy (ABC) trùng với tâm O của ΔABC, góc giữa $(ABB'A')$ và mặt đáy bằng 60^o. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC'.*

Lời giải

- Gọi $D;E$ lần lượt là trung điểm của $AB;BC$. Dễ thấy $60^o = \widehat{\left((ABB'A');(ABC)\right)} = \widehat{A'DO}$ do đó $A'O = \tan 60^o.DO = \dfrac{a}{2}$ vậy nên thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:



$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a}{2}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}.$$

- Ta có: $d\left(AB;CC'\right) = d\left(CC';(A'AB)\right) = d\left(C;(A'AB)\right)$,

ta quan sát khối chóp $A'.ABC$ khối chóp này có thể tích là: $V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ vậy nên nhiệm vụ cuối cùng của ta là tính được diện tích $\Delta A'AB$.

Ta có: $AB = a; A'A = A'B = \sqrt{A'O^2 + AO^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$ nên diện tích $\Delta A'AB$ là:

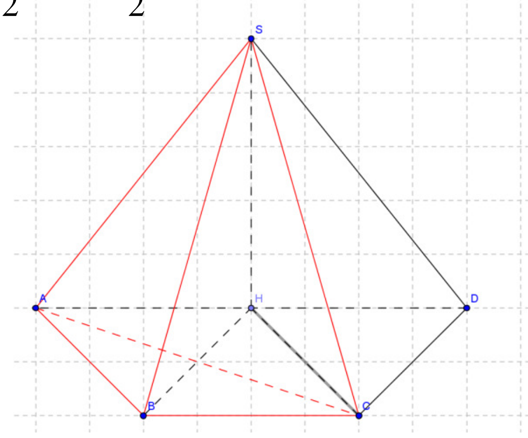
$$S_{\Delta A'AB} = \sqrt{p(p - A'A)(p - A'B)(p - AB)}; \left(p = \frac{a + \frac{a\sqrt{21}}{6} + \frac{a\sqrt{21}}{6}}{2} \right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

Vậy $d\left(AB;CC'\right) = d\left(C;(A'AB)\right) = \dfrac{3V_{A'.ABC}}{S_{\Delta A'AB}} = \dfrac{3a}{4}$ □

Bài toán 6: (Chuyên Võ Nguyên Giáp) *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân $(BC // AD)$. Biết đường cao $SH = a$ với H là trung điểm AD, $AB = BC = CD = a; AD = 2a$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD.*

Lời giải

▪ Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a.\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3$



▪ Ta có $d\left(SB;AD\right) = d\left(AD;(SBC)\right) = d\left(A;(SBC)\right)$,

ta quan sát khối chóp $S.ABC$ khối chóp này có thể tích là:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}a.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

(đường cao hạ từ A xuống BC là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$), vậy nên ta chỉ cần tính diện tích của tam giác ΔSBC.

Ta có: $BC = a; SC = SB = \sqrt{BH^2 + SH^2} = a\sqrt{2}$, do đó diện tích ΔSBC là:

$$S_{\Delta SBC} = \sqrt{p(p-SB)(p-SC)(p-BC)};\left(p = \frac{a + a\sqrt{2} + a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

Vậy $d\left(SB;AD\right) = d\left(A;(SBC)\right) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ □

Kết luận: *Còn rất rất nhiều nữa các đề thi thử và chính thức có thể giải bằng phương pháp này, thiết nghĩ có giải 1000 bài toán (cùng loại) cũng không bằng giải 10 bài nhưng mà nắm vững được phương pháp. Người viết mong rằng bạn đọc có thể sử dụng phương pháp đến mức* ***điêu luyện*** *để khi bí quá (không nhìn ra được chân đường cao hay đường phụ cần vẽ) có thể sử dụng. Phương pháp có một nhược điểm là tính toán rất nhiều (nhưng đó là nhiệm vụ của máy tính ☺) dễ xảy ra sai số ảnh hưởng kết quả, vì vậy một lời khuyên cho phương pháp này là: Luyện tập phương pháp với khoảng 10 bài, khi tính toán thật tập trung và kiểm tra lại các phép toán 1 lần trước khi chấm bút hết.*

*V) **Bài tập đề nghị :***

1) (Chuyên Vĩnh Phúc) *Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$; $BC = a\sqrt{3}$ $\widehat{BAC} = 120^o$. Gọi I là trung điểm cạnh AB, hình chiếu của S lên mặt đáy là trung điểm H của CI, góc giữa SA và mặt phẳng đáy là 60^o. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ A đến (SBC)*

ĐS : $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{16};d=\frac{3\sqrt{37}a}{37}$.

2) (Đề minh họa của BGD &ĐT) *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC=2a;\widehat{ACB}=30^O$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S xuống mặt (ABC) trùng với trung điểm của AC ; $SH=a\sqrt{2}$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm C đến (SAB).*

ĐS : $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{6}}{6};d=\frac{2\sqrt{66}}{11}a$.

3) (Chuyên Hà Tĩnh) *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$; tam giác ΔSAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC=a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ B đến (SAD).*

ĐS : $V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3};d=\frac{2\sqrt{21}}{7}a$.

4) (Chuyên Nguyễn Quang Chiêu- Đồng Tháp lần 1) *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $a\sqrt{3}$; $\widehat{BAD}=120^o$ và cạnh bên $SA\perp(ABCD)$. Biết rằng số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là 60^o. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa BD và SC.*

ĐS : $V_{S.ABCD}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3;d=\frac{3\sqrt{7}}{14}a$.

5) (Chuyên Hưng Yên) *Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120^o$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60^o. Tính theo a thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ đường thẳng BC đến mặt phẳng $(AB'C')$.*

ĐS : $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{3a^3}{8};d=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

6) (Chuyên Lê Hồng Phong) *Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, cạnh $AB=6a$ và góc $\widehat{ABC}=30^o$. Góc giữa mặt phẳng $(C'AB)$ và mặt đáy là 60^o. Tính theo a thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và AB.*

ĐS : $V_{ABC.A'B'C'} = 9\sqrt{3}a^3; d = \dfrac{3a}{2}$.

7) (k2pi.net.vn lần 11) *Cho lăng trụ đứng* $ABC.A'B'C'$ *có đáy* ABC *là tam giác vuông cân tại* B, $A'C = a\sqrt{6}; AC = 2a$. *Gọi* M *là trung điểm của* $A'C'$ *và* I *là tâm của mặt bên* $ABB'A'$. *Tính theo* a *thể tích của lăng trụ* $ABC.A'B'C'$ *và khoảng cách giữa hai đường thẳng* IM *và* $A'C$.

8) (B-2011) *Cho hình lăng trụ* $ABCD.A'B'C'D'$ *có đáy* $ABCD$ *là hình chữ nhật,* $BA = a; AD = a\sqrt{3}$. *Hình chiếu của* A' *lên mặt phẳng* $(ABCD)$ *trùng với giao điểm của* AC *và* BD. *Góc giữa hai mặt phẳng* $(ADD'A')$ *và* $(ABCD)$ *bằng* 60^o. *Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm* B' *đến mặt phẳng* $(A'BD)$.

ĐS : $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{3a^3}{2}; d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

9) (A-2011) *Cho hình chóp* $S.ABC$ *có đáy là tam giác vuông cân,* $AB = BC = 2a$. *Hai mặt phẳng* (SAB) *và* (SAC) *cùng vuông với mặt đáy* (ABC) ; M *là trung điểm của* AB, *mặt phẳng đi qua* SM *và song song với* BC *cắt* AC *tại* N. *Góc giữa* (SBC) *và* (ABC) *là* 60^o. *Tính theo* a *thể tích của* $S.BCNM$ *và khoảng cách giữa* AB *và* SN.

ĐS : $V_{S.BCNM} = a^3\sqrt{3}; d = \dfrac{2\sqrt{39}}{13}a$.

10) (Chuyên KHTN-ĐHKHTN) *Cho lăng trụ đứng* $ABCD.A'B'C'D'$ *có đáy là hình thoi cạnh* a $\widehat{BAD} = 45^o$, $AA' = \dfrac{a\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $O; O'$ *lần lượt là tâm của* $ABCD$ *và* $A'B'C'D'$. *Tính theo* a

a) Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$

b) Khoảng cách từ C *đến* $(A'BD)$ *và khoảng cách giữa hai đường thẳng* AO' *và* $B'O$.

ĐS : $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{a^3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; d\left(C;(A'BD)\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}; d\left(AO';B'O\right) = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}}$

Cần cù bù thông minh ☺